Ad §5.8

§: Konstruktion von Körpererweiterungen

Jetzt drehen wir den Spiess herum. Wir fixieren einen Körper K und suchen geeignete Körpererweiterungen zu Polynomen in $K[X]$.

Def.: Sei $P \in K[X]$ irreduzibel. Ein Oberkörper von K der Form $L = K(a)$ mit $P(a) = 0$ heisst Stammkörper von P über K.

Prop.: Jedes irreduzible $P \in K[X]$ besitzt einen Stammkörper über K. Dabei ist das Paar (L, a) bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt.

Beweis: Setze $L_P := K[X]/(P)$ und $a_P := X + (P) \in L_P$. Dann ist L_P ein Körper, da (P) ein maximales Ideal ist. Somit ist $L_P = K[a_P] = K(a_P)$. Ausserdem gilt bekanntlich $f(a_P) = (\text{Restklasse von } f)$ für jedes $f \in K[X]$, also insbesondere $P(a_P) = (\text{" } \quad \text{" } P) = 0$. Somit erfüllt (L_P, a_P) die gewünschten Bedingungen. Für jedes andere solche Paar (L, a) haben wir nach §2 bereits einen eindeutigen Isomorphismus

$$L_P = K[X]/(P) \xrightarrow{\sim} L \quad \text{mit } a_P \mapsto a,\ f + (P) \mapsto f(a). \quad \text{qed.}$$

Bsp.: $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ ist Stammkörper des irreduziblen Polynoms $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Bem.: Man könnte $\mathbb{C}$ dadurch, oder auch direkt als $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ definieren.

Def.: Sei $F \in K[X] \setminus \{0\}$. Ein Oberkörper von K der Form $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ mit $F(X) = \alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ für $\alpha \in K^\times$ heisst Zerfällungskörper von F über K.

Prop.: Jedes F besitzt einen Zerfällungskörper.

Beweis: Induktion über $n := \deg F$. Klar für $n = 0$ mit $L = K$. Für $n-1 \rightsquigarrow n$ sei P ein irreduzibler Faktor von F. Sei $K' = K(a_1)$ mit $P(a_1) = 0$ ein Stammkörper von P über K. Dann gilt $X - a_1 \mid P(X) \mid F(X)$ in $K'[X]$, also auch $F(X) = (X - a_1) \cdot F_1(X)$ für $F_1 \in K'[X] \setminus \{0\}$. Sei $L = K'(a_2, \ldots, a_n)$ ein Zerfällungskörper von F_1 über K', so dass $F_1(X) = \alpha \cdot \prod_{i=2}^{n} (X - a_i)$ für $\alpha \in K'^\times$. Dann ist auch $F(X) = \alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ und somit $\alpha \in K^\times$ und L ist Zerfällungskörper von F über K. qed.

<u>Beispiel</u>: $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ ist Zerfällungskörper von $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ über $\mathbb{R}$.

<u>Beispiel</u>: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist kein Zerfällungskörper von X^3-2 über $\mathbb{Q}$, da die beiden übrigen komplexen Nullstellen $e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \cdot \sqrt[3]{2}$ nicht in $\mathbb{R}$ und somit auch nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ liegen.